

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Εισηγητής: Βασίλειος Ν. Κασίκης

Μάθημα: Γραμμικά Μαθηματικά

Δευτέρα 20 Ιουνίου 2022

Θέμα 1ο:

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λάθος αιτιολογώντας τον χαρακτηρισμό σας.

- α) Ένα διάνυσμα από μόνο του είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
- β) Αν  $H = \text{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  τότε το σύνολο  $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  είναι βάση του  $H$ .
- γ) Οι ρίνοι στήλες ενός πίνακα  $A$  δημιουργούν μια βάση για τον χώρο  $\text{Col}(A)$ .

( 3 × 0.5 = 1.5 μονάδες )

Θέμα 2ο:

A) Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  με  $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_2 + x_3)$ .

- α) Να βρείτε τον πίνακα  $A$ , του γραμμικού μετασχηματισμού  $T$ .
- β) Να βρείτε μια βάση για κάθε έναν από τους  $\text{Nul}(A)$ ,  $\text{Col}(A)$  και  $\text{Row}(A)$ .
- β) Να βρείτε μια βάση για το σύνολο των διανυσμάτων του  $\mathbb{R}^3$  που βρίσκονται πάνω στο επίπεδο  $x - 3y + 2z = 0$ .

( 0.5 + 1.5 = 2 μονάδες )

( 2 μονάδες )

Θέμα 3ο:

A) Έστω  $D = \{d_1, d_2\}$  και  $F = \{f_1, f_2\}$  δύο βάσεις ενός διανυσματικού χώρου  $V$ . Υποθέτουμε ότι  $2f_1 = d_1 - d_2$ ,  $3f_2 = d_1 + d_2$ .

- α) Να βρείτε τον πίνακα αλλαγής συντεταγμένων από την βάση  $D$  στην βάση  $F$ .
- β) Να βρείτε το  $[x]_F$  για  $x = \frac{1}{4}(d_1 - d_2)$ .

( 0.5 + 0.5 = 1 μονάδα )

B) Να εξετάσετε αν τα πολυώνυμα  $p_1(t) = 1 + t^2$  και  $p_2(t) = 1 - t^2$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του  $P_2$ .

( 2 μονάδες )

Θέμα 4ο:

Ένας επιστήμονας έλυσε ένα μη ομογενές γραμμικό σύστημα δέκα γραμμικών εξισώσεων με δώδεκα αγνώστους και βρήκε ότι τρεις από τους αγνώστους είναι ελεύθερες μεταβλητές. Να εξετάσετε κατά πόσο μπορεί ο επιστήμονας να είναι σίγουρος ότι αν αλλάξει η δεξιά πλευρά των εξισώσεων (δηλαδή αν αλλάξουμε τους σταθερούς όρους) το μη ομογενές γραμμικό σύστημα που θα προκύψει θα είναι συμβιβαστό.

( 1.5 μονάδες )